Suites arithmétiques et géométriques

Objectifs :

- Reconnaitre une suite arithmétique ou géométrique et identifier ses éléments caractéristiques
- Calculer un terme d'indice donné à partir du premier terme ou du p-ième terme.
- Établir et connaître les formules donnant $1+2+...+n$ et $1+q+...+q^n$.

Aperçu historique :

Les rares papyrus mathématiques découverts jusqu'à présent ont révélé que les Égyptiens avaient de très bonnes notions sur les suites et qu'ils savaient résoudre des problèmes à l'aide des suites arithmétiques ou géométriques. Suites arithmétiques : Énoncé du problème R64 du papyrus Rhind
« Exemple de répartition de parts. Si on te dit : (on a) 10 héqat de blé pour 10 hommes. Et la différence entre un homme et son voisin se monte à 1/8 de héqat de blé. La répartition moyenne est de 1 héqat. Soustrais 1 de 10, il reste 9. Prendre la moitié de la différence qui est 1/16. Les 9 fois qui valent 1/2 1/16 de héqat sont à additionner à la répartition moyenne et tu dois soustraire 1/8 de héqat par homme, chacun pris jusqu'au dernier. À faire selon ce qui doit se produire. »
Explication :
Le problème consiste à partager 10 héqat de blé entre 10 hommes. On peut désigner leurs parts respectives par H1, H2, H3, H4, H5, H6, H7, H8, H9 et H10. Les 10 héqat de blé représentent le total des parts à distribuer. Nommons le S. Soit N le nombre de parts. Chaque homme ne possédera pas la même quantité d'héqat. Pris dans l'ordre, chacun obtiendra 1/8 d'héqat de plus que son prédécesseur. Soit H2 = H1 + 1/8, H3 = H2 + 1/8 et ainsi de suite, le dernier individu ayant la plus grande part. 1/8 représente la raison de la suite donc R = 1/8.
*Le scribe détermine en premier lieu la valeur moyenne de héqat que l'on distribuera à chaque homme, soit S/N = 10/10 = 1. Ensuite, il calcule le nombre de différences effectuées sur l'ensemble des 10 individus. Il y en a N-1 = 10-1, soit 9. Il vient R/2 = 1/16, puis R/2 * (N-1) = 1/16 * 9 = 1/2 + 1/16. Le plus grand terme est donné par R/2 * (N-1) + S/N = 1/2 + 1/16 + 1.*
Par une méthode empirique, le scribe a donc retrouvé une propriété des suites arithmétiques.

1. Suites arithmétiques

A. Définition

Définition 8.1 Une suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est dite *arithmétique* si la différence entre deux termes consécutifs est constante. C'est à dire qu'il existe un réel r tel que pour tout entier naturel n, $u_{n+1}=u_n+r$.
Le réel r est appelé *raison* de la suite $(u_n)_{n\geq 0}$.

Exemple 8.1 Si u est la suite arithmétique de premier terme $u_0=5$ et de raison 3, on a :

$$u_0=5$$
$$u_1=u_0+3=5+3=8$$
$$u_2=u_1+3=8+3=11$$

Propriété 8.1 Une suite arithmétique est croissante si sa raison est positive et décroissante sinon.

B. Calcul du terme général

Théorème 8.1 :

- si u est une suite arithmétique de premier terme u_0 et de raison r, alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_0 + nr$;
- si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = a + b \times n$, alors, u est la suite arithmétique de premier terme $u_0 = a$ et de raison b.

Démonstration :

- On a : $u_1 = u_0 + r$,
  puis, $u_2 = u_1 + r = (u_0 + r) + r = u_0 + 2r$.
  De même, $u_3 = u_2 + r = (u_0 + 2r) + r = u_0 + 3r$, ... et ainsi de suite.
  On obtient finalement $u_n = u_0 + nr$.
- Réciproquement, si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = a + nb$, alors $u_{n+1} - u_n = (a + (n+1)b) - (a + nb) = b$.
  Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + b$, et donc u est une suite arithmétique de raison b et de premier terme $u_0 = a + 0 \cdot b = a$.

Exemple 8.2 En reprenant la suite de l'exemple ??, on a :

$$\text{Pour tout } n \in \mathbb{N}, \quad u_n = 5 + n \times 3 = 5 + 3n$$

Remarque : Si le premier terme d'une suite arithmétique est u_1, et sa raison est r, on a :

$$\text{pour tout } n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = u_1 + (n-1)r$$

Et de façon plus générale, si u est une suite arithmétique de raison r, pour tous les entiers n et p on a :

$$u_n = u_p + (n-p) \times r$$

C. Calcul de la somme des premiers termes

Propriété 8.2 La somme S des n premiers termes d'une suite arithmétique est :

$$S = \frac{n \times (\text{premier terme } + \text{ dernier terme})}{2}$$

Dans le cas où le premier terme est u_0, on obtient : $S = \frac{n\times(u_0+u_{n-1})}{2}$.
Dans le cas où le premier terme est u_1, on obtient : $S = \frac{n\times(u_1+u_n)}{2}$.

Démonstration (cas où le premier terme est u_1) On va écrire S de deux façons différentes :

$$S = u_1 + (u_1 + r) + \cdots + (u_1 + (n-2)r) + (u_1 + (n-1)r)$$

$$S = (u_n - (n-1)r) + (u_n - (n-2)r) + \cdots + (u_n - r) + u_n$$

Donc : $2S = n \times u_1 + n \times u_n$ (les autres termes s'annulent) d'où le résultat en divisant les deux membres par 2.

Exemple 8.3 Un élève demande à ses parents, le 1^{er} janvier 2013, 10€ d'argent de poche par mois, avec une augmentation de 0,5€ nets par mois dès le deuxième mois.
On note u_n la somme perçue à l'issue du n^e mois. Ainsi u est une suite arithmétique de premier terme $u_1 = 10$ et de raison $r = 0,5$. En effet, la différence entre deux mois consécutifs est égale à 0,5 €.
La somme perçue en décembre 2013 est donc $u_{12} = 10 + 11 \times 0,5 = 15,5e$.
Le total des sommes perçues au cours de la première année est donc :

$$S = \frac{12 \times (u_1 + u_{12})}{2} = \frac{12 \times 25,5}{2} = 153$$

Remarque : En mathématiques, on utilise généralement la lettre sigma majuscule(Σ) de l'alphabet grec pour écrire les sommes ; ainsi :

$$u_1 + u_2 + ... + u_{12} = \sum_{i=1}^{i=12} u_i$$

Exemple 8.4 Calculons la somme des 100 premiers entiers non nuls : $S_{100} = 1 + 2 + 3 + \cdots + 99 + 100$.
Pour cela, on considère la suite arithmétique v de premier terme $v_1 = 1$ et de raison $r = 1$.
La somme S_{100} cherchée est donc la somme des 100 premiers termes de la suite v :

$$S_{100} = \frac{100 \times (v_1 + v_{100})}{2} = \frac{100 \times (1 + 100)}{2} = 5\,050$$

2. Suites géométriques

A. Définition

Définition 8.2 Une suite $(u_n)_{n \geq 0}$ est dite *géométrique* si chaque terme est obtenu en multipliant le précédent par un même nombre q. C'est à dire qu'il existe un réel q tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = q \times u_n$.
Le réel q est appelé *raison* de la suite $(u_n)_{n \geq 0}$.

Remarque : Si on considère que la suite u n'est pas la suite nulle [1], u est géométrique si pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $\frac{u_{n+1}}{u_n} = q$.

Exemple 8.5 Si u est la suite géométrique de premier terme $u_0 = 5$, et de raison $q = 2$, on a :

$$u_0 = 5, \quad u_1 = q \times u_0 = 2 \times 5 = 10, \quad u_2 = q \times u_1 = 2 \times 10 = 20, \quad u_3 = q \times u_2 = 2 \times 20 = 40, \ldots$$

Propriété 8.3 Soit u une suite géométrique de premier terme u_0 et de raison q. Alors :

- si $u_0 > 0$ et $q > 1$ la suite est strictement croissante
- si $u_0 > 0$ et $0 < q < 1$ la suite est strictement décroissante
- si $u_0 < 0$ les deux résultats précédents sont inversés.

B. Calcul du terme général

Théorème 8.2 :
- si u est une suite géométrique de premier terme u_0 et de raison q, alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_0 \times q^n$;
- si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = a \times b^n$, alors, u est la suite géométrique de premier terme $u_0 = a$ et de raison b.

Exemple 8.6 En reprenant la suite géométrique de l'exemple **??**, on a :

$$\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, \quad u_n = u_0 \times q^n = 5 \times 2^n$$

Remarque : Si le premier terme est u_1, on a : pour tout $n \in \mathbb{N}^*, u_n = u_1 \times q^{n-1}$. De façon plus générale, si u est une suite géométrique de raison q alors pour tous les entiers n et p on a :

$$u_n = u_p \times q^{n-p}$$

C. Calcul de la somme des premiers termes

Propriété 8.4 Soit q un réel différent de 0 et de 1. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$1 + q + q^2 + \ldots \cdots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

Démonstration On note $S = 1 + q + q^2 + ... + q^n$. On remarque qu'en calculant les produits en croix de l'égalité précédente, il suffit de montrer que $(1 - q) \times S = 1 - q^{n+1}$. On a :

1. La suite nulle est la suite dont tous les termes sont égaux à zéro.

$$\begin{array}{rcl}(1-q)\times S & = & S-qS \\ & = & (1+q+q^2+...+q^{n-1}+q^n)-q\times(1+q+q^2+...+q^{n-1}+q^n) \\ & = & 1+q+q^2+...+q^{n-1}+q^n-q-q^2-q3-...-q^n-q^{n+1} \\ & = & 1-q^{n+1}\end{array}$$

cqfd

Exemple 8.7 Si $q=2$,
$1+q+q^2=1+2+4=7$. En appliquant la formule : $1+q+q^2=\frac{1-2^3}{1-2}=\frac{-7}{-1}=7$.
$1+2+\cdots+2^{10}=\frac{1-2^{11}}{1-2}=2\,047$.

Propriété 8.5 Soit u une suite géométrique de premier terme u_0 et de raison q, avec q différent de 1 et de 0. On a :

$$u_0+u_1+\ldots\ldots u_n=u_0\times\frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

Démonstration $u_0=u_0\times 1$, $u_1=u_0\times q$, $u_2=u_0\times q^2$,.... Ainsi, on a :

$$u_0+u_1+u_2+\cdots+u_n=u_0+u_0\times q+u_0\times q^2+...+u_0\times q^n=u_0$$

$$1+q+q^2+...+q^n$$

En utilisant la propriété ??, on obtient :

$$u_0+u_1+......+u_n=u_0\times\frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

Remarque : Si u est une suite géométrique de raison q, la somme des premiers termes peut aussi s'écrire :

$$S=\frac{\text{premier terme}-q\times\text{dernier terme}}{1-q}$$

Exemple 8.8 Un autre élève demande le 1er janvier 2013 à ses parents 10€ d'argent de poche par mois avec une augmentation de 5% par mois dès le deuxième mois.
On note u_n la somme perçue à l'issue du n^e mois. Ainsi u est une suite géométrique de premier terme $u_1=10$ et de raison $q=1+\frac{5}{100}=1{,}05$. En effet, chaque somme perçue est obtenue en multipliant la précédente par le coefficient multiplicateur de l'augmentation soit $1+\frac{5}{100}=1{,}05$.
La somme perçue en décembre 2013 est donc $u_{12}=10\times 1{,}05^{11}\approx 16{,}23$€.
Le total des sommes perçues au cours de la première année est donc :

$$S=\frac{1^{\text{er}}\text{ terme - }q\times\text{dernier terme}}{1-q}=\frac{10-1{,}05\times 1{,}05^{11}\times 10}{1-1{,}05}=159{,}17$$